ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 13 Φεβρουαρίου 2021

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Ισχύει $|\alpha - 3| > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση $x^2 = -\alpha$, είναι αδύνατη για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ με ν περιττό για κάθε, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει πάντοτε λύση.

iv. Ισχύει: $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha\sqrt{\beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

v. Ισχύει: $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Β2. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

Μονάδες 8

Β3. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών;

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \qquad \text{και} \qquad B = \sqrt{12 - \sqrt{6 + \sqrt[3]{25 + \sqrt[3]{8}}}}\,.$$

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των A και B.

Μονάδες 8

Εάν επιπλέον ισχύει: $B - A < x < \frac{A}{2}$ και $\frac{B}{3} < y < B$, τότε:

Γ2. Να γράψετε την παράσταση $\Gamma = |x + 5 - A| + 2|y - B|$ χωρίς τα σύμβολα της απόλυτης τιμής και στη συνέχεια, να δείξετε ότι:

$$0 < \Gamma < 7$$

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές της παράστασης:

$$\Delta = 2x^3 - y^2$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \leq 9$.

Δ1. Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

Μονάδες 5

Δ2. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του *x*.

Μονάδες 5

Δ3. Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος **(β)**.

Μονάδες 10

Δ4. Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος **(γ)** για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18.$$

Μονάδες 5

Εύχομαι επιτυχία!

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 13 Φεβρουαρίου 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 63 Σχολικό Βιβλίο

Α2.

- **i.** Λ
- **ii.** Λ
- **iii.** Σ
- **iv.** Λ
- **v.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

Β2. Για να έχει η παραπάνω εξίσωση μοναδική λύση θα πρέπει ο συντελεστής του x να είναι διάφορος του μηδενός. Επομένως για $\lambda \neq 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την:

$$x = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{(\lambda-1)} \Leftrightarrow x = (\lambda+1).$$

Β3. Για να είναι η παραπάνω εξίσωση ταυτότητα (άπειρες λύσεις) θα πρέπει να είναι της μορφής: $0x=0$. Επομένως, πρέπει να βρω τη τιμή που συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\begin{cases} (\lambda-1)=0 \\ (\lambda-1)(\lambda+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{15}+3+5-\sqrt{15}}{5-3}=\frac{8}{2}=4$$

$$B=\sqrt{12-\sqrt{6+\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{8}}}}=\sqrt{12-\sqrt{6+\sqrt[3]{25+2}}}=\sqrt{12-\sqrt{6+3}}=$$

$$=\sqrt{12-3}=\sqrt{9}=3$$

Γ2. Ισχύει: $B-A<x<\frac{A}{2}$ και $\frac{B}{3}<y<B$ επομένως: $-1<x<2$ και $1<y<3$.

$$\Gamma=|x+5-A|+2|y-B| \Leftrightarrow \Gamma=|x+1|+2|y-3|$$

Για να βγάλω τις απόλυτες τιμές από την παράσταση Γ πρέπει να γνωρίζω το πρόσημο των εσωτερικών παραστάσεων των απολύτων.

- $-1<x<2 \overset{+1}{\Leftrightarrow} 0<x+1<3$, επομένως το $x+1>0$ άρα $|x+1|=x+1$
- $1<y<3 \overset{+(-3)}{\Leftrightarrow} -2<y-3<0$, επομένως το $y-3<0$ άρα $|y-3|=3-y$

Επομένως,

$$\Gamma=(x+1)+2(3-y)=x+1+6-2y=x-2y+7$$

- $-1<x<2$.
- $1<y<3 \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} -2>-2y>-6 \overset{+7}{\Leftrightarrow} +5>-2y+7>1 \Leftrightarrow 1<-2y+7<5$.

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω ανισώσεις κατά μέλη έχουμε:

$$0<x-2y+7<7 \Leftrightarrow 0<\Gamma<7.$$

Γ3. $\Delta=2x^3-y^2$

- $-1<x<2 \Leftrightarrow -1<x^3<8 \overset{\cdot(+2)}{\Leftrightarrow} -2<2x^3<16$.
- $1<y<3 \Leftrightarrow 1<y^2<9 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -1>-y^2>-9 \Leftrightarrow -9<-y^2<-1$.

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω ανισώσεις κατά μέλη έχουμε:

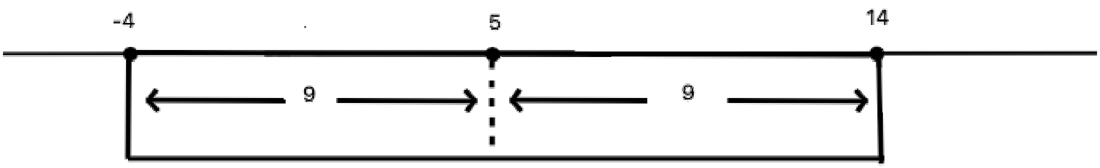
$$-11<2x^3-y^2<15$$

ΘΕΜΑ Δ

$$d(x,5)\le 9.$$

Δ1. Η παραπάνω σχέση δηλώνει πως η απόσταση ενός αριθμού x από τον αριθμό 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.

Δ2.



Δ3. $|x-5|\le 9 \Leftrightarrow -9\le x-5\le 9 \overset{+5}{\Leftrightarrow} -4\le x\le 14$.

Δ4. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $-4\le x\le 14$.

- $-4\le x\le 14 \overset{+4}{\Leftrightarrow} 0\le x+4\le 18$, επομένως το $x+4\ge 0$, άρα $|x+4|=x+4$.
- $-4\le x\le 14 \overset{-14}{\Leftrightarrow} -18\le x-14\le 0$, επομένως το $x-14\le 0$,

άρα $|x-14|=14-x$.

$$|x+4|+|x-14|=(x+4)+(14-x)=x+4+14-x=18.$$